Ejercicios de Análisis Matemático I – Relación 2

20. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$. Prueba que:

a) La adherencia de A es el más pequeño conjunto cerrado que contiene a A. Por tanto A es cerrado si, y sólo si $A = \overline{A}$.

b) El interior de A es el más grande conjunto abierto contenido en A.

c) La frontera de A son los puntos adherentes a A que no son interiores de A.

d) La adherencia de A es la unión de A con la frontera de A.

26. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^n$. Prueba que la sucesión $\{f_n\}$ converge a la función nula $f = 0$ en el espacio $(\mathcal{C}([0,1]), \| \|_1)$ pero no es convergente en $(\mathcal{C}([0,1]), \| \|_\infty)$.

31. Prueba que si una sucesión de Cauchy tiene una sucesión parcial convergente entonces es convergente.

34. Prueba que el espacio $(\mathcal{B}(A), \| \|_\infty)$ es completo.

37. Sea ℓ_∞ el espacio normado de las sucesiones acotadas de números reales con la norma uniforme, es decir, $\ell_\infty = (\mathcal{B}(\mathbb{N}), \| \|_\infty)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\delta_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la sucesión definida por

$$\delta_n(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = n; \\ 0, & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

Prueba que la sucesión $\{\delta_n\}$ no tiene ninguna sucesión parcial convergente.

La numeración de los ejercicios es la misma que hay en los apuntes del curso.

Para entregar el miércoles 10 de octubre.